

# ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В УрФУ

## ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

### 1. Числовые множества. Арифметические действия над числами.

Натуральные числа ( $N$ ). Арифметика натуральных чисел. Простые и составные числа. Разложение натурального числа на простые множители. Делитель, кратное, остаток. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 10. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное.

Целые числа ( $Z$ ).

Рациональные числа ( $Q$ ). Обыкновенные дроби, их типы, свойства. Десятичные дроби. Проценты. Пропорции. Сравнение рациональных чисел. Обращение обыкновенной дроби в бесконечную десятичную периодическую дробь и обратно.

Иррациональные числа ( $I$ ). Число  $\pi$ . Число  $e$ .

Действительные числа ( $R$ ), их представление в виде десятичных дробей. Сравнение действительных чисел. Числовые промежутки.

Изображение чисел на прямой. Модуль (абсолютная величина) действительного числа, его геометрический смысл, свойства.

### 2. Вычисления и преобразования выражений

Числовые выражения. Выражения с переменными.

Формулы сокращенного умножения.

Степень с натуральным показателем, степень с рациональным показателем. Арифметический корень. Понятие о степени с действительным показателем. Одночлен и многочлен.

Разложение многочлена на множители.

Многочлен одной переменной. Корень многочлена. Квадратный трехчлен, его разложение на линейные множители.

Логарифм. Основное логарифмическое тождество. Свойства логарифмов. Формула перехода от одного основания логарифма к другому. Десятичные и натуральные логарифмы.

Тождественные преобразования иррациональных, степенных, показательных и логарифмических выражений.

Синус, косинус, тангенс и котангенс действительного числа. Основное тригонометрическое тождество. Основные тригонометрические формулы: 1) соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента, 2) формулы сложения, 3) формулы двойного аргумента, 4) формулы половинного аргумента, 5) формулы правила приведения, 6) формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение, 7) формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, 8) формулы, выражающие синус, косинус и тангенс одинарного аргумента через тангенс половинного аргумента.

Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс действительного числа, основные соотношения.

Тождественные преобразования тригонометрических выражений.

Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формулы  $n$ -го члена и суммы первых  $n$  членов арифметической и геометрической прогрессий. Понятие о бесконечно убывающей геометрической прогрессии и о сумме всех ее членов.

### 3. Функции и графики.

Числовые функции. Область определения и множество значений функции. Свойства функции: непрерывность, периодичность, четность, нечетность, возрастание и убывание, экстремумы, наибольшие и наименьшие значения, ограниченность, сохранение знака.

Определение, свойства и графики функций:

- линейной  $y = kx + b$ ;
- квадратичной  $y = ax^2 + bx + c$ ;
- степенной  $y = ax^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ );
- дробно-линейной  $y = k/x$ ,  $y = (ax + b)/(cx + d)$ ;
- корня  $y = \sqrt{x}$ ;
- показательной  $y = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ;
- логарифмической  $y = \log_a x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ;
- тригонометрических функций  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ ;
- обратных тригонометрических функций  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $y = \operatorname{arcctg} x$ .

Производная функции. Геометрический и физический смысл производной. Таблица производных. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Уравнение касательной к графику функции. Исследование функций с помощью производной:

нахождение экстремумов функции, наибольших и наименьших значений, промежутков монотонности. Построение графика функции с помощью производной.

Первообразная функция. Основная таблица первообразных. Правила вычисления первообразных. Неопределенный интеграл. Задача о площади криволинейной трапеции, её решение с помощью интеграла.

Формула Ньютона – Лейбница.

### 4. Уравнения и неравенства.

Уравнения с одной переменной, с несколькими переменными.

Корни (решения) уравнения. Геометрическое представление уравнений и их решений.

Понятие о равносильных уравнениях.

Общие приемы решения уравнений: разложение на множители, замена переменной, использование свойств функций.

Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Формулы Виета для квадратного уравнения.

Иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения.

Тригонометрические уравнения; общие формулы для решения уравнений  $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$ ,  $\operatorname{tg} x = a$ ,  $\operatorname{ctg} x = a$ .

Системы уравнений с двумя переменными. Решения системы, их геометрический смысл.

Равносильные системы. Основные приемы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных. Рациональные и иррациональные неравенства с одной переменной. Показательные и логарифмические неравенства.

Тригонометрические неравенства простейших типов.

Использование свойств и графиков функций при решении уравнений, неравенств и систем.

Метод интервалов и областей. Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений и неравенств с двумя переменными и их систем.

### 5. Геометрия.

Планиметрия.

Прямая, луч, отрезок, ломаная; длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Окружность, круг. Параллельные прямые.

Преобразования геометрических фигур. Осевая и центральная симметрия. Параллельный перенос. Поворот. Преобразование подобия, его свойства. Отношение площадей подобных фигур.

Многоугольник, его вершины, стороны, углы, диагонали.

Треугольник, его медианы, высоты, биссектрисы, их свойства. Виды треугольников. Равенство треугольников, признаки равенства треугольников. Подобие треугольников, признаки подобия треугольников. Прямоугольный треугольник, соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника.

Равнобедренный треугольник, свойства его углов и свойство биссектрисы угла при его вершине.

Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция и их свойства.

Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Касательная к окружности. Дуга окружности. Сектор и сегмент круга.

Центральный и вписанный в окружность углы.

Площадь треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции. Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь сектора круга.

Правильный многоугольник. Зависимости между стороной, радиусами вписанной и описанной окружностями правильного многоугольника. Формулы площади правильного многоугольника.

Вписанная и описанная окружность многоугольника, условия существования. Признаки вписанной и описанной окружности четырехугольника.

Стереометрия.

Основные понятия стереометрии (точка, прямая, плоскость, пространство).

Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые. Угол между прямыми в пространстве. Перпендикулярность прямых. Параллельность и перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Теорема о трех перпендикулярах.

Параллельность плоскостей, перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства.

Двугранный угол, линейный угол двугранного угла.

Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от прямой до плоскости. Расстояние между параллельными плоскостями. Расстояние между скрещивающимися прямыми. Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость. Многогранники.

Вершины, ребра, грани многогранника. Развертка.

Призма, ее основания, боковые ребра, высота, боковая поверхность. Прямая и наклонная призма. Правильная призма. Параллелепипед. Прямой и прямоугольный параллелепипед. Куб.

Пирамида, ее основание, боковые ребра, высота, боковая поверхность. Треугольная пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида. Симметрии в кубе, в параллелепипеде, в призме и пирамиде.

Сечения многогранников. Построение сечений.

Тела и поверхности вращения.

Цилиндр и конус. Усеченный конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. Осевые сечения и сечения параллельные основанию. Шар и сфера, их сечения.

Касательная плоскость к сфере. Сфера, вписанная в многогранник, сфера, описанная около многогранника.

Объемы тел вращения и площади их поверхностей.

Формулы объема куба, параллелепипеда, призмы, цилиндра. Формулы объема пирамиды и конуса. Формулы площади поверхностей цилиндра и конуса. Формулы объема шара и площади сферы.

Векторы и координаты.

Векторы. Модуль вектора. Равенство векторов. Сложение векторов и умножение вектора на число. Угол между векторами. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов, свойства. Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Компланарные векторы. Разложение вектора по трем некопланарным векторам. Декартовы координаты точки на плоскости и в пространстве. Понятие о координатном описании геометрических фигур. Формулы расстояния между двумя точками на плоскости и в пространстве. Уравнение окружности. Уравнения сферы. Уравнение плоскости. Формула расстояния от точки до плоскости.

### **Основные умения и навыки**

Экзаменуемый должен уметь:

1. выполнять (без калькулятора) арифметические действия над числами и числовыми выражениями, заданными в виде десятичных и обыкновенных дробей; с требуемой точностью округлять данные числа и результаты вычислений; проводить прогнозирование приближенного результата;
2. проводить тождественные преобразования многочленов, дробей, содержащих переменные, выражений, содержащих степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции.
3. определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; строить графики линейной, квадратичной, степенной, дробно-линейной, показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических функций.
4. решать уравнения, неравенства, системы (в том числе с параметрами) и исследовать их решения; находить приближенные решения уравнений и их систем, используя графический метод;
5. применять общие свойства функции; строить графики функций и множества точек координатной плоскости, заданные уравнениями и неравенствами; описывать по графику и по формуле поведение и свойства функций;
6. изображать геометрические фигуры на чертеже; делать дополнительные построения; строить сечения, исследовать взаимное расположение фигур;
7. пользоваться свойствами чисел, векторов, функций и их графиков, свойствами арифметической и геометрической прогрессий;
8. пользоваться свойствами геометрических фигур, их характерных точек, линий и частей, свойствами равенства, подобия и взаимного положения фигур;
9. пользоваться соотношениями и формулами, содержащими модули, степени, корни, логарифмические, тригонометрические выражения, величины углов, длины, площади, объемы;
10. составлять уравнения, неравенства, системы и находить значения величин, исходя из условия задачи;
11. вычислять производные и первообразные элементарных функций, применяя правила вычисления производных и первообразных; пользоваться понятием производной при исследовании функций на монотонность, экстремум и при построении графика функции, а также для нахождения наибольшего и наименьшего значений функций на

промежутке; решать задачи с применением уравнения касательной к графику функции; вычислять площадь криволинейной трапеции;

12. применять метод координат при решении геометрических задач и алгебраических задач, содержащих параметр.
13. излагать и оформлять решение задач логически правильно, полно и последовательно, с необходимыми пояснениями.